

COMITATO NAZIONALE PER L'ENERGIA NUCLEARE
Laboratori Nazionali di Frascati

LNF - 62/23

M. Puglisi: EFFETTO DEL CARICO ELETTRONICO SULLE CAVITA'
RISONANTI DELLE MACCHINE ACCELERATRICI ORBITALI.

Nota interna: n° 126
9 Aprile 1962

LNf - 62/23

Nota interna: n° 126

9 Aprile 1962

M. Puglisi: EFFETTO DEL CARICO ELETTRONICO SULLE CAVITA' RISONANTI DELLE MACCHINE ACCELERATRICI ORBITALI.

§ 1) - Introduzione

Nelle macchine acceleratrici il fascio di particelle cariche viene sottoposto all'azione di un campo elettrico. Nella maggioranza dei casi tale campo è prodotto da una o più cavità risonanti. Le considerazioni che faremo, valide nel caso di una o più cavità, non si applicano ovviamente al caso degli acceleratori lineari dove il meccanismo dello scambio di energia tra guida e particelle e la reazione sul generatore non sono funzioni solamente del numero di cavità che compongono la struttura acceleratrice della macchina.

Introdurremo le seguenti ipotesi.

- 1) Le particelle cariche si muovono su orbite chiuse con velocità costante ed hanno una energia almeno dieci volte maggiore rispetto a quella che potrebbero ricevere al massimo da ciascun risuonatore.

§ 2) - Schematizzazione del problema.

Il sistema che vien preso in esame è quello rappresentato in figura (1). Cioè un risuonatore a cavità, per esempio di tipo rientrante, è eccitato con accoppiamento di tipo induttivo da un amplificatore e dal fascio di particelle che lo attraversa.

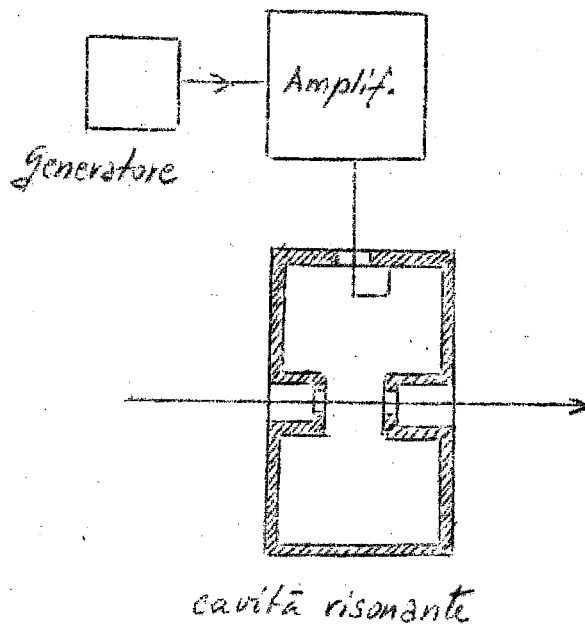


FIG. 1

Il generatore esterno, composto da un auto oscillatore e da un sistema di amplificatori, è genericamente accoppiato al risuonatore per mezzo di una spira posta nella zona 'magnetica' del risuonatore.

Quello indicato in fig. 1 è il sistema più usato in pratica per quanto siano possibili molte varianti sul tema.

Ovviamente i calcoli che seguono sono fatti avendo presente un particolare tipo di accoppiamento ma le conclusioni raggiunte hanno carattere generale. Il fascio di

particelle traversa invece il risuonatore al 'gap' ossia nella zona lungo la quale si ha sempre la maggior tensione e l'accoppiamento con il fascio è praticamente completamente capacitivo.

Poichè in questo problema proprio la frequenza della tensione e della corrente che eccitano il risuonatore deve essere ritenuta costante e per ovvie ragioni di impiantistica questa frequenza deve essere sempre molto vicina (possiamo dire entro 1%) alla frequenza propria del risuonatore è lecito schematizzare quest'ultimo con un circuito a costanti concentrate nel quale gli elementi r ; L ; e C sono scelti in modo da corrispondere agli elementi Q_0 ; R_0 ; ω_0 caratteristici del risuonatore nell'interno del modo fondamentale^(x) e del cammino di integrazione scelto per definirne la tensione utilizzabile.

Da quanto detto discende che il più elementare circuito che ancora possa interpretare i complessi fenomeni in studio è quello rappresentato in figura 2. Qui il generatore e l'amplificatore sono sostituiti dal generatore ideale di tensione capace di erogare la tensione V_1 uscendo sull'impedenza S .

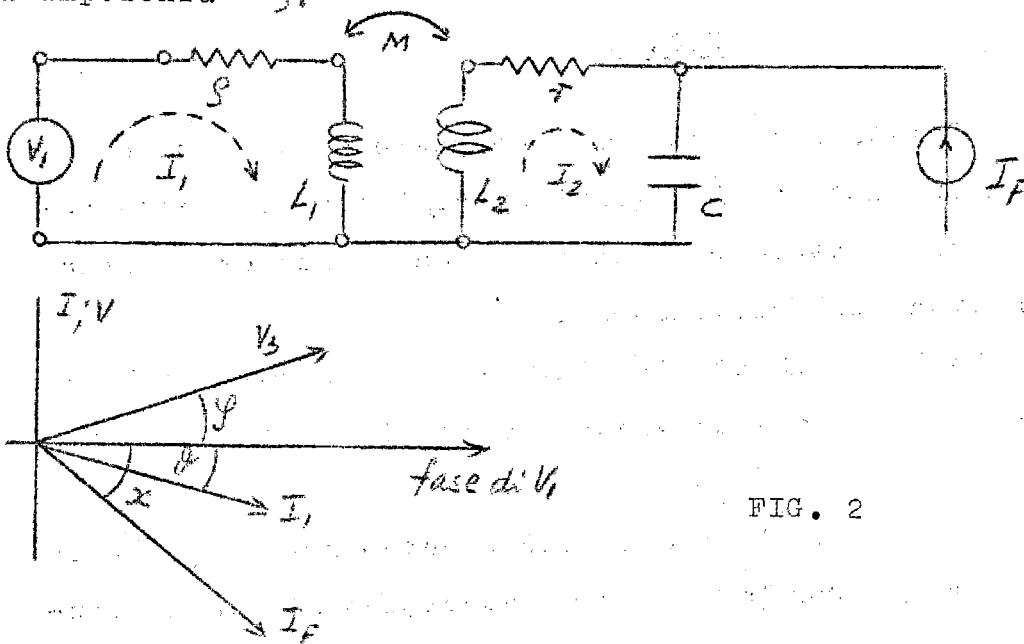


FIG. 2

(x) - T. Moreno: Microwave Transmission design Data. (Dover Publ. - 1958)

Mentre il fascio (che deve avere intensità costante per ipotesi) è schematizzato dal generatore ideale di corrente I_F .

L'accoppiamento con la cavità risonante avviene tramite la mutua induzione M inserita tra la spira di accoppiamento del circuito primario e l'induttanza che compare nel circuito equivalente che schematizza la cavità risonante.

Nel calcolo che segue l'asse di riferimento delle fasi è dato dalla direzione della fase di V_1 ed a questa, convenzionalmente posta uguale a zero, sono riferite le fasi delle altre tensioni e correnti.

A questo punto occorre precisare qualche altra ipotesi su I_F .

La corrente circolante entro la macchina non ha forma sinusoidale come è richiesto per poter trattare semplicemente il problema. Si può pensare però di sostituire alla corrente I_F il suo sviluppo in serie di Fourier ed applicare nel circuito dato in figura 2 una serie di generatori; uno per ciascuna componente.

In effetti dato che le varie componenti hanno fra di loro frequenze diverse (e precisamente tutte le armoniche della fondamentale) per ogni frequenza andrebbe modificato il valore dei parametri del circuito equivalente e il problema si può risolvere esattamente sovrapponendo i risultati che si hanno dai vari circuiti parziali. Vedremo in seguito che, se il risuonatore ha forma particolarmente studiata, è possibile trascurare le eccitazioni a frequenza diversa da quella della fondamentale in quanto la reattanza presentata dal risuonatore alle frequenze armoniche può essere resa trascurabile rispetto a quella offerta alla fondamentale.

Qualitativamente si può osservare che la presen-

za del risuonatore altera lo spettro di ampiezza e fase del fascio che in conseguenza cambia forma nei successivi passaggi attraverso il risuonatore. Torneremo su questo punto ma possiamo già dire che in ogni caso si tratta di distorsioni lineari.

§ 3) - Analisi del circuito.

Con riferimento alla figura 2 scriviamo le equazioni di equilibrio in funzione della variabile complessa P.

Per comodità di scrittura lo schema di figura 2 viene ridisegnato come in figura 3 dove al posto del generatore di corrente compare un generatore di tensione che esce sulla impedenza σ . Successivamente facendo tendere σ all'infinito e la V del generatore ad $I_P \sigma$ ci riporteremo nelle condizioni di figura 2.

$$(1) \begin{cases} (S + PL_1)I_1 - PM I_2 + 0 I_3 = V_1 \\ -PM I_1 + (\tau + PM + 1/PC)I_2 - 1/PC I_3 = 0 \\ 0 I_1 - 1/PC I_2 + (\sigma + 1/PC)I_3 = V_2 \end{cases}$$

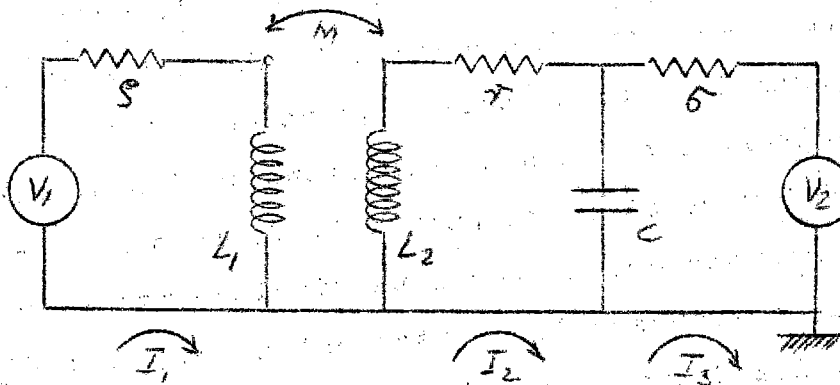


FIG. 3

Risolvendo il sistema; facendo tendere σ ad infinito come detto e passando dalla variabile P alla varia-

bile $J\omega$ in quanto studiamo gli stati stazionari, si ottengono le espressioni della V ai capi della capacità C e la corrente I_1 erogata dal generatore.

Queste valgono:

$$(2) \quad \begin{cases} \vec{V}_3 = \frac{(\gamma \sin x - \beta \cos x) I_F + J[\alpha V_1 - (\beta \sin x - \gamma \cos x) I_F]}{P + JQ} \\ \vec{I}_1 = \frac{[V_1(1 - \xi) - \alpha I_F \cos x] + J[\eta V_1 + \alpha I_F \omega L]}{P + JQ} \end{cases}$$

Nelle espressioni 2 sono stati adottati i seguenti simboli
 x = angolo tra la corrente del fascio e la tensione V_1 di riferimento.

$$\alpha = \omega M$$

$$\beta = r_p - \omega^2 L_1 L_2 (1 - K^2)$$

$$\gamma = \omega (L_2 + L_1 + r)$$

$$P = s - \omega^2 C [r_p - \omega^2 L_1 L_2 (1 - K^2)]$$

$$Q = \omega L_1 + \omega C [r_p - \omega^2 L_1 L_2 (1 - K^2)]$$

$$\xi = \omega^2 L_2 C$$

$$\eta = \omega r C$$

dalle equazioni (2) si può ricavare l'angolo, sotto forma di tangente, che la tensione V_0 fa con la corrente I_F ; ovviamente questo angolo è funzione sia di I_F sia di x per una certa scelta dei parametri del risuonatore e del generatore V_1 . Eseguendo i complicati ma semplici passaggi si trova

$$(3) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\mu - \lambda - \operatorname{tg} x - \mu \lambda \operatorname{tg} x}{1 + \mu \lambda + (\mu - \lambda) \operatorname{tg} x}$$

dove μ e λ rappresentano due tangenti ausiliarie definite come segue:

$$(4) \quad \mu = \frac{\alpha V_1 - \beta \sin \alpha - \gamma \cos \alpha}{(\gamma \sin \alpha - \beta \cos \alpha) I_F} \quad \lambda = \frac{Q}{P}$$

Le formule (2) e (3) risolvono il problema di verifica in quanto dati tutti i valori è possibile calcolare la tensione V_3 e l'angolo φ tra la tensione stessa o la corrente del fascio.

Le formule predette però non consentono il calcolo di progetto e vedremo come questo possa essere fatto con formule molto più semplici.

Possiamo intanto osservare quanto segue:

La tensione V è funzione sia della tensione del generatore sia della corrente del fascio e può essere ottenuta come somma vettoriale di due effetti considerati separatamente. I diagrammi riportati nella figura 4 chiariscono la situazione. Nel diagramma A si è supposto che l'effetto del fa-

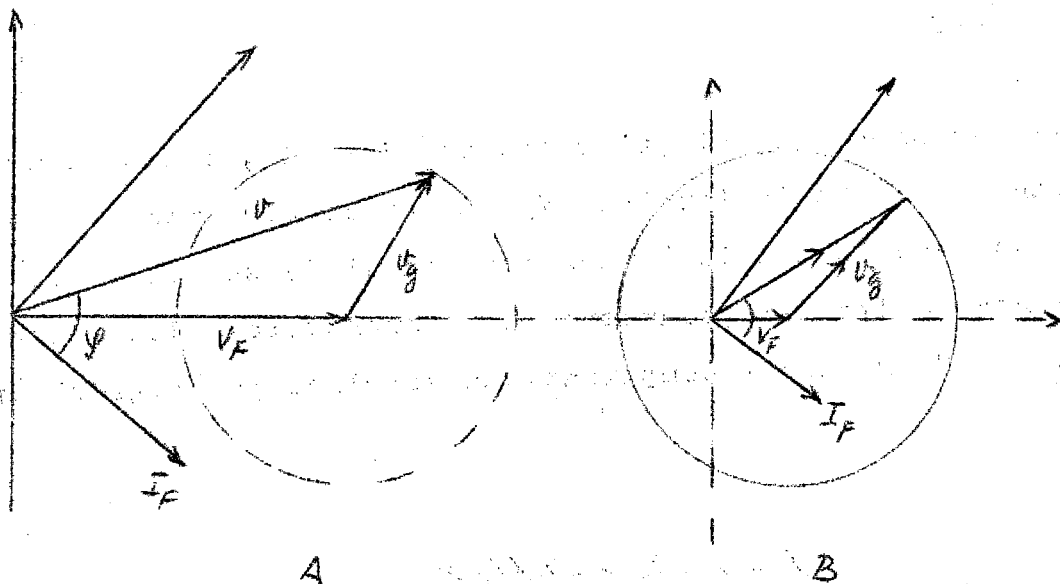


FIG. 4

scio (V_F) da solo possa dar luogo ad una tensione maggiore

di quella che si svilupperebbe per effetto del generatore preso da solo. Nel diagramma 4B si è invece supposto che l'effetto del generatore sia maggiore di quello del fascio.

In entrambi i diagrammi si è assunto l'asse delle fasi coincidente con la direzione di I_F . La tensione dovuta al fascio è indicata con V_F ; la tensione dovuta al generatore è indicata con V_G e la risultante vettoriale di $V_G + V_F$ individua in modulo e angolo il vettore V risultante. In entrambi i casi il diagramma polare che correla la tensione V o l'angolo φ è un cerchio che contiene o meno l'origine a seconda che la V_F sia minore o maggiore di V_G . In altri termini saranno possibili tutte le fasi tra V ed I_F solo se V_G è maggiore di V_F ; viceversa se $V_G < V_F$ solo un certo intervallo di fasi sarà possibile. Al limite per V_G che tende a zero rimane il solo effetto del fascio e la tensione V_F ha fase fissa rispetto a I_F .

§ 4) - Considerazioni qualitative

L'analisi del circuito ed il calcolo di progetto che svilupperemo devono condurre a realizzare le migliori condizioni per eccitare il risonatore. Occorre precisare questo punto.

La tensione eccitatrice che si localizza ai capi della spira di adattamento dipende sia dai parametri del risonatore sia dalla corrente del fascio; (modulo e fase della corrente rispetto alla tensione totale). Questa tensione darà luogo ad una corrente I_1 che circola nella maglia del generatore e che in generale non sarà in fase con la V_1 . Imporre al circuito la condizione di adattamento significa imporre alla corrente I_1 di essere in fase con la tensione V_1 ed avere modulo uguale a $V_1/2Z$. Si deve osservare però che la corrente I_1 risulta dalla somma di due vettori e cioè

la corrente dovuta al generatore V_1 e la corrente dovuta al fascio; queste due correnti quindi, che per il momento indicheremo con I_1^G ed I_1^F , devono comparire nel circuito primario in modo da avere i componenti in quadratura rispetto alla fase di V_1 con valore opposto se vogliamo che la corrente al primario risulti reale.

Questo fatto sarà possibile solo per i valori del parametro x e del condensatore C che soddisfano l'equazione:

$$(5) \quad \frac{M V_1 + \alpha I_F \cos x}{V_1 (1 - \xi) - \alpha I_F \sin x} = \frac{a}{P}$$

Esplicitando il valore dei coefficienti; assumendo come incognita il valore di C indicato per comodità con y e come parametro il valore di x la (5) diventa.

$$(6) \quad y^2 + yR + S = 0$$

dove

$$R = - \frac{V_1 [M L_1 L_2 (2 - k)] + M I_F \{ [\tau S - \omega^2 L_1 L_2 (1 - k^2)] \sin x - \omega (L_2 S - L_1 \tau) \cos x \}}{\omega L_1 [\tau^2 - \omega^2 L_2^2 (1 - k^2)] V_1}$$

[C]

$$S = \frac{- M I_F (S \cos x + \omega L_1 \sin x) + L_1 V_1}{\omega^2 L_1 [\tau^2 - \omega^2 L_2^2 (1 - k^2)] V_1}$$

[C²]

Appare quindi che scegliendo un opportuno valore per la pulsazione di risonanza della cavità è possibile avere corrente reale al primario per un dato valore del parametro x .

Una volta che la corrente al primario sia in fase occorrerà soddisfare una altra condizione per imporre

che abbia il modulo voluto. Questa condizione però è importante solo se si alimenta la induttanza di accoppiamento attraverso un cavo coassiale.

Riassumendo le considerazioni precedenti si può dire che la condizione di corrente reale al primario che è di gran lunga la più importante ai fini tecnici è ottenibile solo imponendo al risuonatore una pulsazione caratteristica diversa dalla pulsazione della tensione eccitatrice.

Questo punto è molto importante e ne vedremo presto l'importanza quantitativa; qualitativamente ciò significa che il fascio circolante nella macchina altera il regime delle correnti attive e reattive nel risuonatore e pertanto si deve imporre al risuonatore di operare come trasformatore di impedenza in senso generalizzato.

§ 5) - Separazione degli effetti ed analisi del circuito con resistenza equivalente.

In generale si vuole che la cavità risonante ceda energia al fascio circolante nella macchina. Al gap della cavità avviene lo scambio; possiamo pensare allora, per quanto riguarda la cessione di energia, che in parallelo alla capacità C con la quale si schematizza il gap venga posta una resistenza R_t tale da tener conto sia della cessione di energia al fascio sia delle perdite proprie del risuonatore (x).

(x) Le perdite nel risuonatore sono perdite serie; l'energia ceduta al fascio dà gli stessi effetti che darebbe una ammettenza posta in parallelo al gap. Quando i fattori di merito totali sono alti è lecito schematizzare tutte le perdite con una resistenza equivalente posta in parallelo alla capacità del gap.

In questo caso, e con riferimento alla figura 5 le equazioni di equilibrio sono:

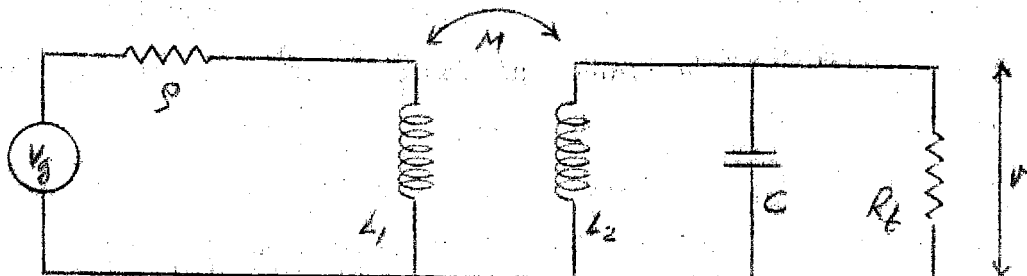


FIG. 5

$$(7) \begin{cases} (P + PL_1)I_1 - PM I_2 + 0 = V_g \\ -PM I_1 + (PL_2 + \frac{1}{pC})I_2 - \frac{I_2}{pC} = 0 \\ 0 - \frac{I_2}{pC} + (\frac{1}{pC} + R_t)I_3 = 0 \end{cases}$$

Nella figura 5 e nelle equazioni (7) il valore di R_t e di C tengono conto delle perdite nella cavità e di eventuali altre reattanze reali o fittizie introdotte dal meccanismo di cessione della energia (per questo, allo scopo di facilitare i calcoli, si è scelto lo schema in parallelo).

Risolvendo il sistema ed indicando con V_1 la tensione che si localizza ai capi della induttanza si trova:

$$(8) \begin{cases} V = V_1 \frac{MR_t}{P^2CR_t(L_1L_2 - M^2) + P(L_1L_2 - M^2) + L_1R_t} \\ I_1 = V_1 \frac{P^2L_2CR_t + PL_2 + R_t}{P[P^2CR_t(L_1L_2 - M^2) + P(L_1L_2 - M^2) + L_1R_t]} \end{cases}$$

Imporre al sistema (8) la condizione di adattamento significa imporre che la soluzione $V_1 = \mathcal{E} I_1$ è verificata in modulo ed in argomento.

Quindi la seconda delle equazioni (8) si traduce nelle due condizioni

$$(9) \quad \begin{cases} p^2(L_1 L_2 - M^2 - L_2 C p R_t) - \mathcal{E} R_t = 0 \\ p^3(C R_t L_1 L_2 - C M^2 R_t) + p(L_1 R_t + L_2 \mathcal{E}) = 0 \end{cases}$$

se è verificata la condizione di adattamento.

Risolvendo il sistema delle (9) ponendo $p = j\omega$ si possono determinare due dei 4 parametri del circuito e precisamente

$$(10) \quad \begin{cases} L_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_t} [L_2 - R_t^2 C (1 - \omega^2 L_2 C)] \\ M^2 = \frac{\mathcal{E}}{R_t} [L_2^2 + \left(\frac{R_t}{\omega}\right)^2 (1 - \omega^2 L_2 C)^2] \end{cases}$$

Le espressioni (10) possono per comodità di calcolo essere poste nella forma (10 bis) introducendo i parametri caratteristici del circuito. Si ha:

$$(10 \text{ bis}) \quad \begin{cases} L_2 = \frac{R_t}{\omega_0 Q} & \frac{L_1}{L_2} = \frac{\mathcal{E}}{R_t} \left\{ 1 - Q^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right] \right\} \\ C = \frac{Q}{\omega_0 R_t} & K = \frac{+}{-} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 Q^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right]^2}{1 - Q^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right]}} \end{cases}$$

dove k è definito dalla

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

Quindi per un dato valore di \mathcal{E} e di R_t , fissando arbitrariamente (almeno fino a questo punto) i valori di ω_0 e di Q , si calcolano i valori degli elementi del circuito nella ipotesi di cessione di energia per mezzo di una resistenza equivalente agli effetti energetici del fascio e con il generatore adattato.

Si può verificare che quando siano soddisfatte le condizioni (9) e cioè siano adottati i valori dati dalle (10 bis) la prima delle equazioni (8) si riduce alla equazione^(x)

$$(11) \quad V = |V_1| \sqrt{\frac{R_t}{S}}$$

e quindi riferendosi alla V_g invece che alla V_1 si ottiene

$$(11 \text{ bis}) \quad V = \frac{V_g}{2} \sqrt{\frac{R_t}{S}}$$

§ 6) - I parametri equivalenti del fascio.

Supponiamo che la cavità risonante sia senza perdite e che sia alimentata da un generatore ideale V_g che esce su resistenze nulla. Ricaviamo la espressione della V in questa ipotesi:

Chiaramente basterà porre $\rho = r = 0$ nelle equazioni 2 per ottenere ciò che si vuole.

(x) Si dimostra subito quanto affermato se si sostituiscono nella prima delle (8) i valori definiti dalla (9) in funzione di P . Difatti risolvendo le (9) direttamente si trova:

$$L_1 = S/R_t [L_2 - R_t^2 C (1 + P^2 L_2 C)]; \quad M_2 = S/R_t [L_2 - \frac{R_t^2}{P^2} (1 + P^2 L_2 C)]$$

e sostituendo queste espressioni nella prima delle (8) si ha:

$$V = V_1 \sqrt{\frac{R_t}{S}} \sqrt{\frac{P L_2 - R_t (1 + P^2 L_2 C)}{P L_2 + R_t (1 + P^2 L_2 C)}}$$

passando da P a $j\omega$ si trova che il secondo radicale ha sempre modulo uguale a uno.

Conviene però, al solo fine di semplificare il calcolo cambiare il sistema di riferimento dei vettori e assumere come fase di riferimento quella della corrente I_F . In questo modo il diagramma delle tensioni e delle correnti diventa quello dato in figura 6.

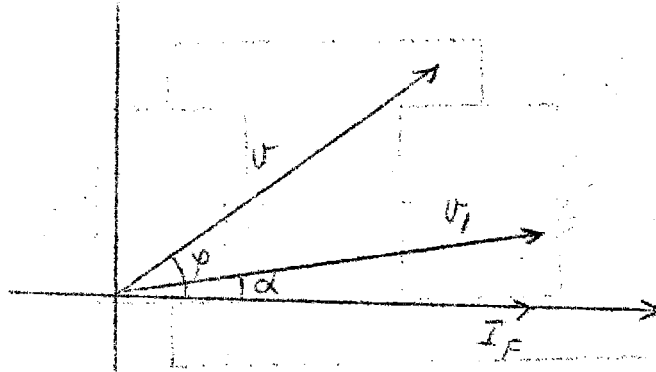


FIG. 6

Con questo riferimento e nelle ipotesi fatte la prima delle equazioni 2 diventa

$$(12) \quad V(\cos\varphi + j\sin\varphi) = \frac{-M V_1 (\cos\alpha + j\sin\alpha) + j\omega I_F (L_1 L_2 - M^2)}{\omega^2 C (L_1 L_2 - M^2) - L_1}$$

da questa equazione si può ricavare \vec{V}_1 e cioè

$$V_1(\cos\alpha + j\sin\alpha) = \frac{-[\omega^2 C (L_1 L_2 - M^2) - L_1] V \cos\varphi + j\omega I_F (L_1 L_2 - M^2)}{M}$$

e quindi dividendo i termini reali da quelli immaginari

$$(13) \quad \begin{cases} V_1 \cos\alpha = \frac{[\omega^2 C (L_1 L_2 - M^2) - L_1] V \cos\varphi}{M} \\ V_1 \sin\alpha = \frac{\omega I_F (L_1 L_2 - M^2) - [\omega^2 C (L_1 L_2 - M^2) - L_1] V \sin\varphi}{M} \end{cases}$$

Riconsideriamo adesso il circuito della cavità come nel caso della figura 5; supponiamo cioè che il generatore sia V_1 ed esca su impedenza zero mentre il carico posto in parallelo al gap sia formato da una resistenza R_t (che congloba le perdite proprie del risuonatore) e da una capacità C^* che si suppone pure essa in parallelo a quella della cavità. La figura 7 chiarisce la situazione. Ovviam

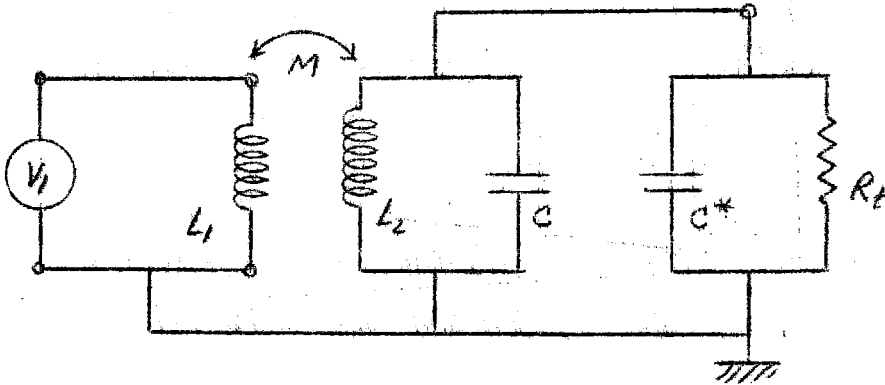


FIG. 7

mente si potranno applicare le equazioni (C) pur di sostituire $C_t = C + C^*$ al posto della capacità C . Possiamo anche, in analogia con quanto fatto prima indicare con ψ l'angolo che la tensione ai capi di R_t fa con V_1 ed assegnare a V_1 non la fase zero ma la fase arbitraria α .

La prima delle equazioni (8) risulta quindi così modificata:

$$V(\cos\psi + j\sin\psi) = V_1(\cos\alpha + j\sin\alpha) \frac{MR_t}{L_1 R_t - \omega^2 C_t R_t (L_1 L_2 - M^2) + j\omega (L_1 L_2 - M^2)}$$

e quindi ricavando le componenti del vettore V_1 si ha:

$$(14) \begin{cases} V_{1, \cos\alpha} = \frac{V \cos\psi [L_1 R_t - \omega^2 (C + C^*) R_t (L_1 L_2 - M^2)] - \omega V \sin\psi (L_1 L_2 - M^2)}{MR_t} \\ V_{1, \sin\alpha} = \frac{V \sin\psi [L_1 R_t - \omega^2 (C + C^*) R_t (L_1 L_2 - M^2)] + \omega V \cos\psi (L_1 L_2 - M^2)}{MR_t} \end{cases}$$

Dato che il circuito è lo stesso se V_1 e V devono avere lo stesso valore nei due casi occorre trovare che valore devono avere R_t e C^* perchè le (14) coincidano con le (13).

Imponendo l'eguaglianza tra i componenti reali e tra i componenti in quadratura che compaiono nei due gruppi di equazione si ha:

$$(15) \left\{ \begin{aligned} V \cos \varphi R_t [L_1 - \omega^2 (C + C^*) (L_1 L_2 - M^2)] - \omega V \sin \varphi (L_1 L_2 - M^2) &= \\ &= R_t [\omega^2 C (L_1 L_2 - M^2) - L_1] V \cos \varphi \\ V \sin \varphi R_t [L_1 - \omega^2 (C + C^*) (L_1 L_2 - M^2)] + \omega V \cos \varphi (L_1 L_2 - M^2) &= \\ &= R_t I_F \omega (L_1 L_2 - M^2) - R_t V \cos \varphi [\omega^2 C (L_1 L_2 - M^2) - L_1] \end{aligned} \right.$$

moltiplicando la prima eq. per $-\sin \varphi$; la seconda per $\cos \varphi$ addizionando si ricava il valore di R_t che sostituito nella prima equazione permette di ricavare C^* . eseguendo i passaggi si trovano le relazioni fondamentali cercate.

$$(16) \left\{ \begin{aligned} R_t &= \frac{V}{I_F \cos \varphi} \\ C^* &= - \frac{I_F \sin \varphi}{\omega V} \end{aligned} \right.$$

Le relazioni (16) sono estremamente importanti in quanto consentono di analizzare il comportamento del risuonatore caricato dal fascio con un risuonatore caricato da una resistenza e da una capacità che dipendono dalle condizioni di eccitazione volute.

Si spiega quindi anche il significato del disaccordo che si deve introdurre stando alla equazione (6). Difatti il carico del fascio contiene anche il carico dato da una capacità che ha il valore dato dalla seconda delle (16). Non sarà quindi in generale possibile trovare che la pulsazione di eccitazione deve coincidere con la pulsazio-

ne di risonanza.

§ 7) - Considerazioni generiche di progetto

Le considerazioni svolte fin qui permettono di semplificare grandemente il calcolo di progetto e di verifica; possiamo infatti procedere come segue:

1°) Sono date le condizioni di lavoro e cioè la pulsazione ω ; la corrente del fascio I_F la tensione V acceleratrice e lo sfasamento che si vuole tra corrente e tensione; si possono così calcolare la resistenza R e la capacità (positiva o negativa) dovuta al fascio; in particolare $C^* = \frac{I_F \sin \varphi}{\omega V}$

2°) Si fissano in base alla esperienza il fattore di merito e la resistenza parallela equivalente del risuonatore che dovrà accelerare il fascio. Il fattore di merito e la resistenza parallela dipendono dal tipo di risuonatore che si può impiegare ed entro certi limiti possono essere considerati dei dati. E' importante che la resistenza parallela del risuonatore sia abbastanza più grande della R introdotta dal fascio ma è chiaro che oltre un certo tanto non serve a nulla migliorare le caratteristiche del risuonatore e sotto certi punti di vista strettamente tecnici la cosa può essere controproducente.

3°) Si calcola il nuovo fattore di merito del risuonatore tenendo conto del fatto che la resistenza totale è il parallelo delle due

$$R_t = \frac{R R_0}{R + R_0}$$

e si fissa il valore di ω_0 . (Il valore di ω_0 deve essere più basso del valore di ω altrimenti il valore di L_1 risulta negativo e K immaginario).

4°) Dato il valore di Q ed il valore di ω_0 si calcolano per mezzo delle 10 bis^(x) i valori di L_1 , L_2 ; K e C .

Il valore di C così calcolato va compensato aggiungendogli il valore di C^* e sono così noti i parametri del circuito. Per questo è necessario conoscere il valore della resistenza di uscita f del generatore.

5°) Si calcola la tensione ai capi della spira di eccitazione che vale:

$$V_1 = V \sqrt{\frac{3}{R_L}}$$

ovvero la tensione del generatore $V_g = 2V_1$.

Sono noti così tutti gli elementi di progetto per le condizioni di carico volute.

Nota che sia la capacità reale che deve avere il risuonatore è immediato per quanto scarsamente importante calcolare l'angolo x che la corrente del fascio deve fare con la tensione del generatore.

Siccome siamo nelle condizioni di adattamento l'angolo tra V_1 ed I_1 sarà zero e quindi zero la sua tangente trigonometrica. Quindi dalla seconda delle 2 si può ricavare $\text{sen} x$ e si ha:

$$\text{sen}^2 x + a \text{sen} x + b = 0$$

dove

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{2 \frac{Q}{P} \frac{V_1}{\omega I_f} \left[1 - \frac{Q}{P} (1 - \beta) \right]}{\left(\frac{Q}{P} \right)^2 - 1} \\ b = \frac{\left(\frac{V_1}{\omega I_f} \right)^2 \left[1 - \frac{Q}{P} (1 - \beta) \right]^2 - 1}{\left(\frac{Q}{P} \right)^2 - 1} \end{array} \right.$$

(x) - Vedi nota in fondo al testo.

L'equazione precedente definisce l'angolo α cercato; PQ, η, ξ, α , hanno lo stesso significato che nel paragrafo due.

§ 8) - Campo di variabilità possibile.

Come è stato visto le formule date permettono di risolvere il problema ma la scelta dei parametri iniziali non è del tutto arbitraria. Difatti la soluzione che si trova assicura che il fascio passerà nel risonatore con la fase voluta rispetto alla tensione ma non garantisce a priori che saranno possibili tutte le fasi come si è visto discutendo a proposito del diagramma circolare. Certamente saranno possibili tutte le fasi solo se la tensione che il generatore può fare apparire al gap è in modulo maggiore di quella indotta dal fascio a parità di altre condizioni. Analizzando separatamente gli effetti si trova che la tensione dovuta al generatore V_g e quella dovuta al fascio V_F sono proporzionali attraverso la stessa costante H alle espressioni

$$\begin{cases} V_g^* = HV \omega M = K \omega M V \sqrt{\frac{P}{R_t}} \\ V_F^* = H I_F \left\{ P r - \omega^2 L_1 L_2 (1 - K^2) + j \omega (L_2 P + L_1 r) \right\} \end{cases}$$

dove V è la tensione voluta al gap.

Imponendo che V_g sia maggiore di V_F si trova la condizione voluta che ovviamente viene a dipendere sia da ω sia da r . Indicando con R la resistenza parallela del risonatore e con Q_0 il suo fattore di merito a vuoto si ha che deve essere

$$(17) \quad \frac{(I_F R (\omega^2 P + V)) P V}{R} > \frac{\left\{ P \frac{R}{\omega^2} - \omega^2 L_1 L_2 (1 - K^2) \right\}^2 + \omega^2 L_2^2 \left(P + \frac{L_1 R}{\omega^2} \right)^2}{\omega^2 M^2}$$

Si noti che la condizione (17) finisce per essere praticamente funzione solo di ξ o R in quanto L_1 o K sono determinati dalle condizioni di adattamento ed il valore della pulsazione di risonanza del risuonatore influisce egualmente per i due generatori.

La condizione (17) può imporre grandi valori per r e quindi valori bassi per R; è però importante osservare che specialmente per le macchine acceleratrici il campo di variabilità della fase possibile è necessariamente piccolo e quindi può non essere necessario, in generale, soddisfare alla (17).

§ 9) - Variazioni delle condizioni di carico.

In presenza del fascio sotto le condizioni di carico volute la corrente al primario è in fase con la tensione ed ha il valore ottimo per il massimo trasferimento di energia.

Se il carico varia varierà anche la corrente nel circuito primario in accordo con la seconda delle 2.

Le condizioni di assenza di fascio conducono alla espressione:

$$I_1 = \frac{V_1(1-\xi) + j\eta V_1}{P + jQ} = \frac{\sqrt{[P(1-\xi) + \eta Q]^2 + [\eta P - Q(1-\xi)]^2}}{P^2 + Q^2} V_1$$

e l'angolo di sfasamento è definito da:

$$\tan \varphi = \frac{\eta P - Q[1-\xi]}{P(1-\xi) + \eta Q}$$

Questo dimostra come si vedrà nella applicazione numerica, che se il fascio per il quale è stato progettato il risuonatore deve assorbire una energia comparabile o superiore a quella assorbita dalla cavità allora le condizio

ni di funzionamento a vuoto divengono pericolose sia per sovrattensione sugli alimentatori sia perchè l'impedenza al primario diviene fortemente reattiva per effetto del grande disaccordo introdotto dalla mancanza del fascio.

A questa situazione si può avviare in maniera semplice:

Nelle macchine acceleratrici in particolare le cavità risonanti sono dotate di un discriminatore di fase che interviene tutte le volte che la cavità risulta disaccordata e comanda un servo-meccanismo che o fa variare di pochissimo la frequenza di eccitazione (senza uscire dalla zona di stabilità della macchina), o fa cambiare leggermente i parametri della cavità riportandola in accordo.

In base a quanto si è visto sin qui però l'impiego di un discriminatore di fase che operasse prendendo l'informazione dalla cavità stessa sarebbe concettualmente errato in quanto la cavità stessa in condizioni di funzionamento normale deve risultare accordata dal fascio stesso.

Quello che invece si può imporre è che sia sempre reale la corrente nella spira di eccitazione e che l'informazione venga derivata proprio da questa corrente. Nel paragrafo successivo diamo uno schema di come potrebbe essere realizzato l'impianto.

§ 10) - Il sistema di contro-reaione di ampiezza e frequenza.

Per fissare le idee cerchiamo di valutare in maniera estremamente semplice (commettendo gli errori sempre nel verso tale da mettersi nelle peggiori condizioni) gli effetti delle variazioni di carico in modo da stabilire in linea di massima le prestazioni che il sistema di contro-reaione è chiamato a fornire.

Sia $V = 20.000$ Volt la tensione che il risuonatore deve fornire $I_F = 1A$ la corrente del fascio, $\varphi = 75^\circ$, e $\omega = 1,2 \cdot 10^8$ rad/sec la pulsazione della tensione di eccitazione. Supponiamo di usare un risuonatore definito dai seguenti parametri misurati a vuoto. $\omega_0 = 1,2 \cdot 10^8$ $Q_0 = 6000$ $R_0 = 250.000 \Omega$. In questo caso la capacità equivalente C_R e C_F del risuonatore e del fascio valgono

$$C_R = \frac{Q_0}{\omega_0 R_0} = \frac{6000}{1,2 \times 10^8 \times 2,5 \times 10^5} = \frac{6 \times 10^3}{3 \times 10^{13}} = 200 \text{ pF}$$

$$C_F = \frac{I_F \sin \varphi}{\omega V} = \frac{0,96}{1,2 \times 2 \times 10^{12}} = 0,4 \times 10^{-12} = 0,4 \text{ pF}$$

Mentre la resistenza equivalente al fascio vale:

$$R_F = \frac{V}{I \cos \varphi} \approx \frac{20000}{0,26} \approx 74000 \Omega$$

Quindi il sistema di controrazione deve poter compensare una variazione di circa 0,5 pF su 200 pF (pari al 3%) ed una variazione di resistenza da ~ 58.000 a 250.000Ω . (Il valore di 58.000Ω è quello dovuto al parallelo della resistenza equivalente del risuonatore e del fascio).

Ciò significa che il circuito di correzione per la capacità variabile deve mettere in gioco una corrente reattiva

$$\Delta I = \omega \Delta C V = 1,2 \times 10^8 \times 0,5 \times 10^{-12} \times 2 \times 10^4 \approx 1,2 \text{ Amp}$$

Mentre la tensione sulla spira di accoppiamento deve poter essere variata di un ΔV pari a

$$\Delta V = V \sqrt{\frac{R_0}{R_0}} \left(\sqrt{1 + \frac{R_0}{R_F}} - 1 \right) = 20.000 \sqrt{\frac{60}{250000}} \left(\sqrt{1 + \frac{250}{58}} - 1 \right) \approx 400 \text{ V}$$

essendo

$$V = V \sqrt{\frac{P}{R_T}} \approx 660 \text{ V}$$

la tensione che si deve avere a regime sulla spira di eccitazione quando il generatore ha una impedenza di uscita $Z = 60 \Omega$. Queste sono le variazioni che si devono compensare per passare dalle condizioni di pieno carico a quelle nella quali il contributo del fascio è trascurabile.

Le variazioni anzidette dovranno essere maggiori se si vuole tener conto di eventuali condizioni di sovraccarico; ma il calcolo di progetto dovrebbe essere fatto tenendo conto esplicito delle condizioni di sovraccarico che in questo caso vengono prese come condizioni di riferimento. Queste ultime considerazioni nascono dal fatto che per un dato gruppo di condizioni di partenza può darsi che non sia possibile avere delle vere condizioni di sovraccarico. Ciò accade in maniera più o meno vistosa tutte le volte che la tensione che si può sviluppare al gap per effetto della sola corrente I_T è notevolmente superiore alla tensione che si avrebbe per effetto del solo generatore (in questo caso infatti l'intervallo di casi φ ammissibile si può ridurre praticamente fino a zero).

Tutto ciò premesso riportiamo nella figura 8 un possibile schema di impianto e del dispositivo di controllo.

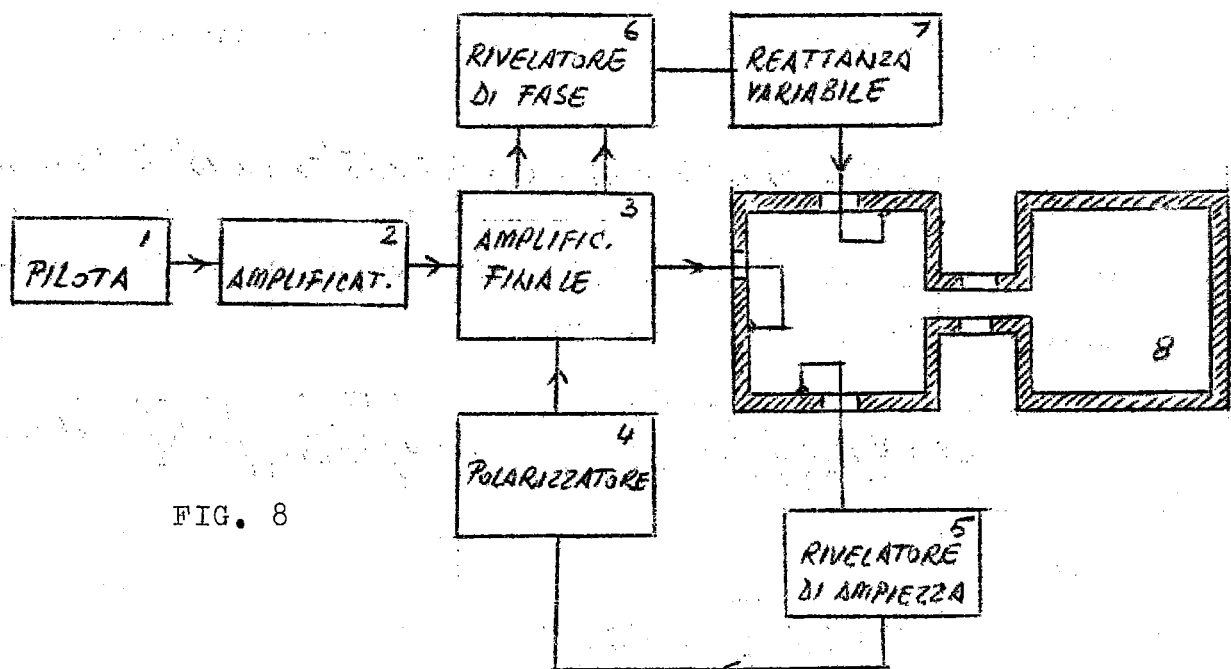


FIG. 8

I blocchi uno e due rappresentano il circuito pilota e la catena di amplificatori a radiofrequenza fino all'ingresso dell'amplificatore finale. La potenza dell'amplificatore terminale è comandata dal valore del negativo di griglia dell'amplificatore stesso. (blocchi 3 e 4).

Il valore assoluto della tensione di polarizzazione viene fatto dipendere attraverso il circuito rettificatore e polarizzatore dal valore di picco della tensione presente nel risuonatore che viene letta da una spira di misura opportunamente tarata. La risposta dell'amplificatore deve venire regolata in modo da avere operazione stabile intorno ai valori di carico normale.

Due segnali proporzionali rispettivamente alla tensione che eccita lo stadio finale e alla tensione che si sviluppa sulla spira di eccitazione comandano la risposta di un rivelatore di fase (blocco 6).

Il discriminatore di fase a sua volta comanda una rete capace di assorbire correnti sfasate rispetto alla tensione inducente e che può essere realizzata per esempio con un tubo di reattanza o con delle ferriti saturabili.

Chiaramente quando la tensione sulla spira che eccita la cavità non è più in fase con la corrente che percorre la spira stessa interviene il discriminatore di fase che variando i parametri del risuonatore rifasa il carico e consente un corretto funzionamento al circuito stabilizzatore di ampiezza.

§ 11) - Conclusioni.

La trattazione svolta fino a qui conduce alle conclusioni che vogliamo qui brevemente riassumere in forma qualitativa.

1°) Il fascio circolante nella macchina introduce nel risuo

- natore energia attiva o reattiva.
- 2°) A seconda della fase tra tensione e corrente il fascio cede o riceve energia.
 - 3°) In generale non sarà possibile ottenere una fase arbitraria tra fascio e tensione al gap.
 - 4°) La corrente al circuito primario può sempre essere mantenuta in fase con la tensione del generatore accordando opportunamente il circuito secondario.
 - 5°) La variazione di capacità equivalente è tanto più sensibile percentualmente quanto più piccola è la capacità del circuito secondario. Ciò nonostante si deve cercare per il circuito secondario la capacità più piccola possibile. Intuitivamente si può comprendere come un valore di capacità piccolo conduca ad un fattore di merito basso e quindi ad una grande banda passante che rende sempre meno importante l'effetto di disaccordo introdotto dalle variazioni del carico. Matematicamente ciò risulta immediato dalla espressione delle 10bis dove infatti al tendere a zero di Q il coefficiente di accoppiamento tende ad 1 per qualunque valore del disaccordo.
 - 6°) Il sistema di controreazione a doppia maglia, per l'accordo e per l'ampiezza può consentire di stabilizzare il circuito contro le variazioni di carico.

Analisi di un caso particolare - Grafici.

Si prende in esame il caso seguente:

Tensione richiesta $V = 20,000$ V pulsazione $\omega = 1,2 \cdot 10^8$ rad/sec
Corrente $I_F = 1$ A. " $\omega = 1,2 \cdot 10^8$ rad/sec
Sfasamento $\psi = 75^\circ$

Si assume per il circuito risonante equivalente il seguente gruppo di parametri.

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 = 1 + 2 \times 10^{-4}; \quad R = 250.000 \Omega; \quad Q = 6.000$$

La resistenza equivalente al fascio è

$$R_F = \frac{V}{I_F \cos \varphi} \approx 80.000$$

La capacità dovuta al fascio è

$$C^* = - \frac{I_F \cos \varphi}{\omega V} = 0.4 \text{ pF}$$

Le funzioni $\frac{L_1}{L_2} \cdot \frac{R_L}{S}$ e K sono riportate nel diagramma universale, riportato in appendice. Di qui per $R_L \approx 58.000 \Omega$ e $S = 60 \Omega$ si ricavano i valori di $\frac{L_1}{L_2}$ e K.

Il circuito equivalente rimane quindi definito dai parametri

$$L_1 = 0,13121310 \cdot 10^{-6}$$

$$L_2 = 0,3750374 \cdot 10^{-6}$$

$$C = (185,2037 - 04) \text{ P.F.}$$

$$K = 0,0557904 \quad r = 8,1 \cdot 10^{-3} \Omega.$$

La tensione da dare sulla spira di accoppiamento è

$$V_1 = V \sqrt{\frac{S}{R_L}} = 1.276 \times 10^3 \text{ V}$$

Ricavando due coppie di valori (oltre quello di progetto) per V e S dando ad x due valori arbitrari si può tracciare il cerchio luogo della tensione cercata. Il diagramma dato in fig. 9 illustra la situazione; appare come in questo caso non tutte le fasi siano possibili. La parte del cerchio contenuta nel semipiano a destra dell'asse delle ordinate corrisponde a tutte quelle fasi per le quali il fascio cede energia al circuito oscillante.

Per meglio illustrare la situazione riportiamo nel diagramma di fig. 10, in funzione del valore della capacità posta nel circuito secondario i valori assunti dalla tensione al gap; della corrente al primario e della tg del-

l'angolo tra la tensione e la corrente al primario per un valore del parametro x ($x = 60^\circ$) che è assai prossimo al valore che risolve esattamente il problema.

Ringraziamenti

Desidero qui ringraziare vivamente il gruppo 'calcoli numerici' diretto dal dott. A. Turrin e particolarmente la dottoressa M.A. Spano per aver eseguito numerosissime tabulazioni e verifiche numeriche. Ringrazio altresì il Sig. A. Marzolla, laureando presso codesti laboratori per la sua collaborazione ed i dottori M. Bassotti ed A. Massarotti per alcune utili discussioni sull'argomento.

NOTA - Occorre tener presente che i parametri qui introdotti sono parametri equivalenti scelti per individuare quel circuito equivalente che meglio interpreta il funzionamento del risuonatore. Scopo di questo lavoro non è quello di dare le regole per il passaggio dai parametri di un risuonatore a quelli di un circuito equivalente ma quello di vedere quantitativamente come si comporta un circuito a costanti concentrate che interpreta nel modo migliore il comportamento di una cavità risonante.

In molti casi però, quando il risuonatore ha forma particolare, i parametri ω_0 , Q_0 propri del risuonatore nel modo fondamentale conducano, con piccoli errori, a valutare direttamente i parametri L e C del circuito equivalente. Ciò avviene tutte le volte che il campo elettrico ed il campo magnetico occupano zone diverse del risuonato-

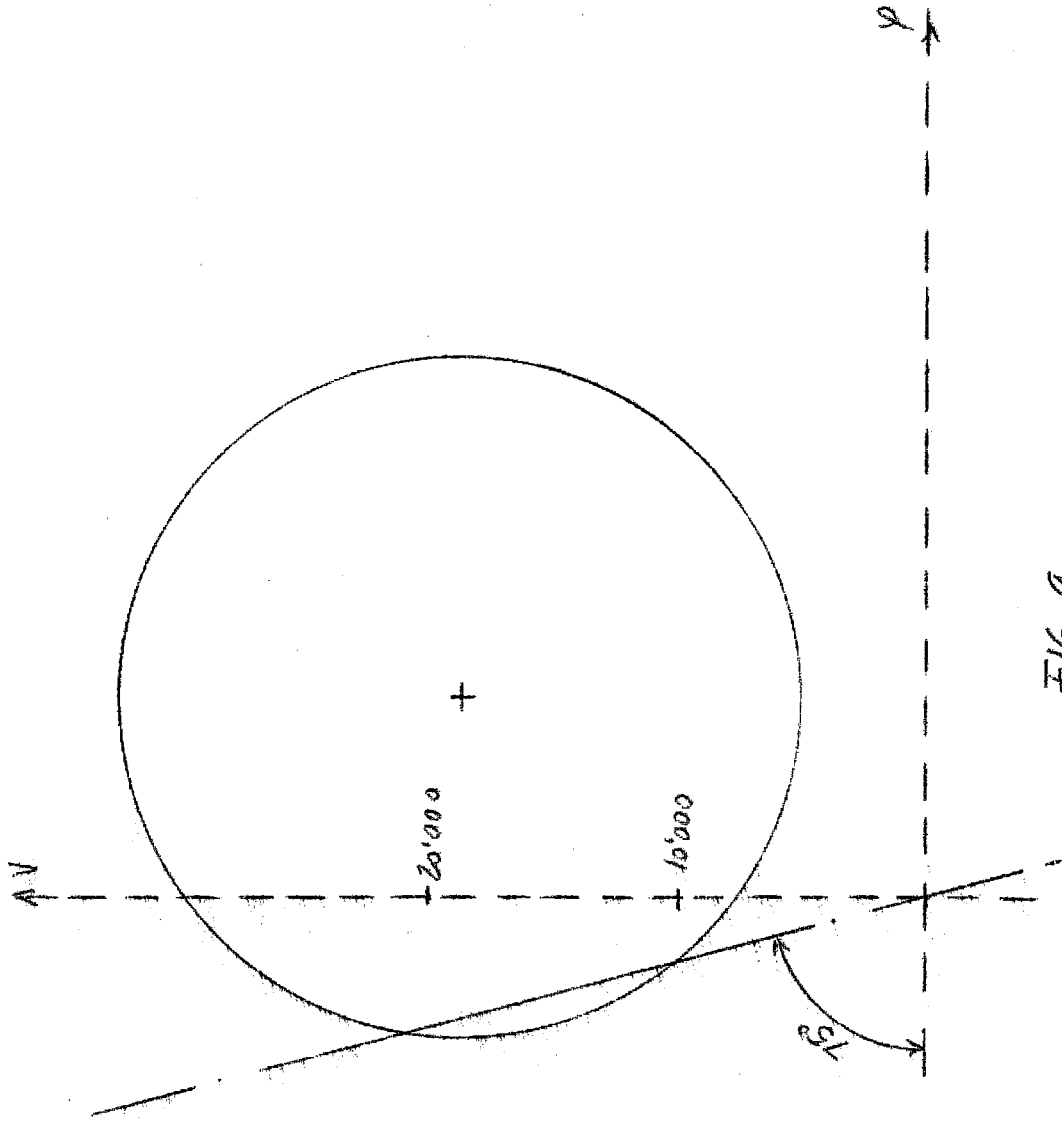


FIG. 9

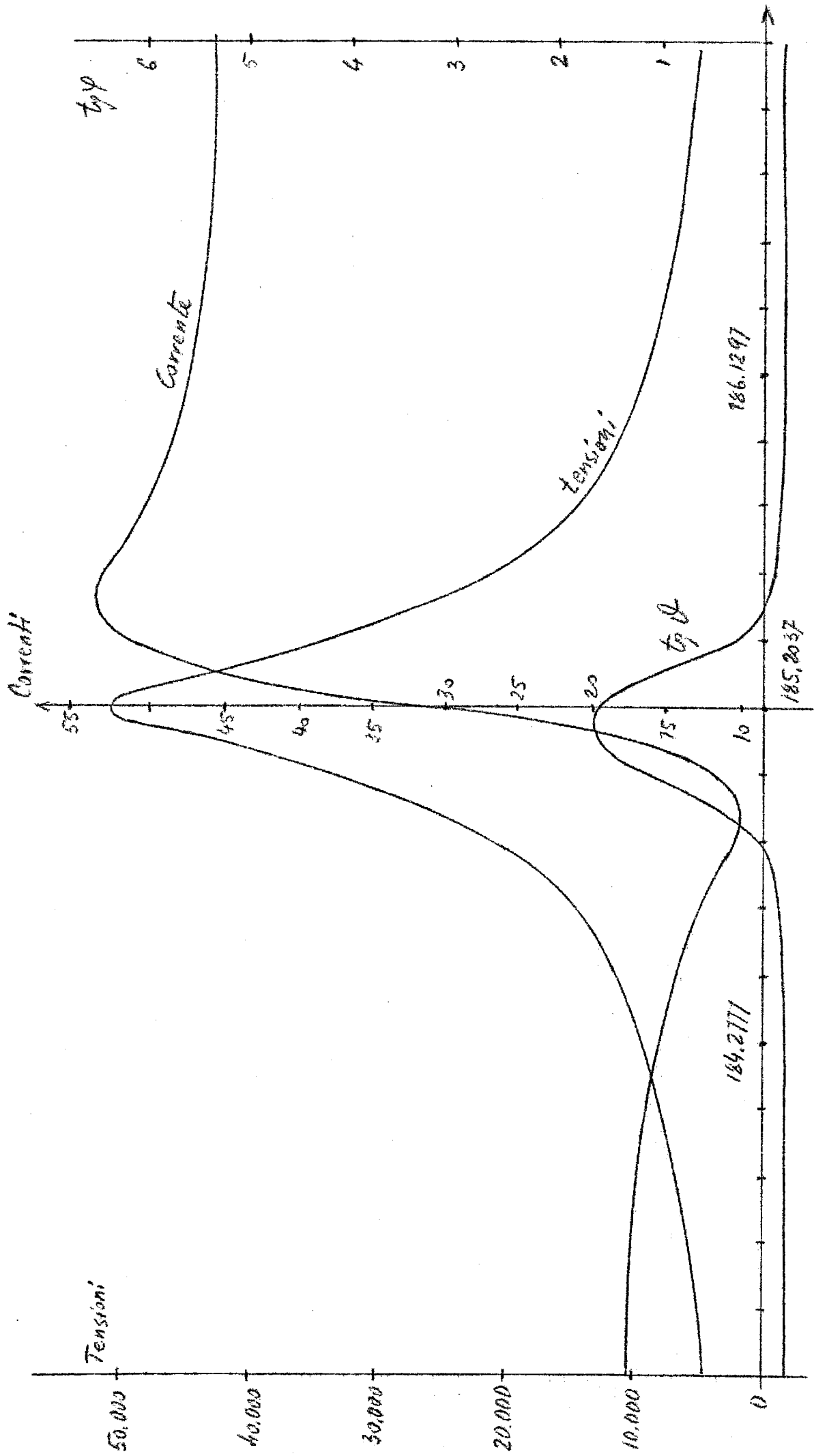


Fig. 10

re ed uno dei due è localizzato principalmente in un volume abbastanza piccolo rispetto a quello di tutto il risuonatore.

In ogni caso però, conosciuto il comportamento del circuito equivalente si può risalire al comportamento del risuonatore.

Appendice

Se si assume come variabile il rapporto $\frac{\omega}{\omega_0}$ e come parametro il rapporto $\frac{R_t}{S}$ si possono normalizzare le relazioni 10 bis. Nel diagramma riportato qui di seguito sono dati i valori delle funzioni $\frac{L_1}{L_2} \cdot \frac{S}{R_t}$ e K.

Noti che siano i dati di progetto S; ed R_t è possibile scegliere i valori di $\frac{L_1}{L_2}$ e K compatibili con una certa pulsazione di accordo e con un certo fattore di merito globale assenti per il circuito secondario.

Bibliografia.

- (1) E. Puglisi, I.F. Quercia: Electrons loading on a radio frequency accelerating cavity of a 1 GeV synchrotron. LNF-57/7 dei Laboratori Nazionali di Frascati (10.6.57).
- (2) L.J. Laslett, V. Kelvin Neil and A.M. Sessler: Coherent electromagnetic effects in high current particle accelerators. Rev. of Sci. Inst. 32, 276 (1961)
- (3) V. Kelvin Neil: Beam loading of Radio frequency cavity. Thesis. Radiation Lab. Berkeley, UCRL 9124.
- (4) G.M. Branch: Electron beam coupling in interaction gaps of cylindrical symmetry - IRE Trans. on Electron Devices 8, 193 (1961)

